

TD sur les probabilités

Exercice N°01 :

Un médecin doit au cours d'une étude, visiter 6 villes :

- a) S'il se trouve 10 villes dans l'aire géographique à laquelle il s'intéresse, de combien de manière lui est-il possible de choisir un groupe de 6 villes ?
- b) Toujours dans la même hypothèse de 10 villes situées dans cette aire géographique, mais en admettant, en outre, que l'ordre dans lequel il visitera des 6 villes choisies présente de l'importance, combien d'itinéraires différents peut-on sélectionner ?
- c) En supposant que les 6 villes à visiter aient été choisies mais pas encore l'itinéraire qui leur est dévolu, de combien de manières peut se dérouler la visite des 6 villes ?

Solution :

- a) le médecin doit visiter 6 villes parmi 10 villes, le nombre de possibilités pour choisir un groupe de 6 villes sans tenir compte de l'ordre (combinaisons) est :

$$C_{10}^6 = \frac{10!}{6! (10 - 6)!} = \frac{3628800}{720 \times 24} = 210$$

Donc il existe 210 manières pour choisir un groupe de 6 villes parmi 10 villes.

- b) Toujours le médecin doit visiter 6 villes parmi 10 villes, le nombre de possibilités pour choisir un groupe de 6 villes en tenant compte de l'ordre (arrangements) est :

$$A_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{3628800}{24} = 151200$$

Donc il existe 151200 itinéraires différents entre les 6 villes visitées parmi 10 villes.

c) Maintenant, le choix des 6 villes a été réalisé. Le médecin doit visiter ces 6 villes. le nombre de possibilités pour faire sa visite entre les 6 villes sans tenir compte de l'ordre (permutations) est :

$$P_6 = 6! = 720$$

Donc il existe 720manières de définir un itinéraire entre les 6 villes.

Exercice n° 02:

La probabilité pour qu'un individu ait une mauvaise réaction à l'injection d'un certain sérum est de 0,001.

Déterminer la probabilité pour que sur 2000 individus :

1. 3 individus aient une réaction dangereuse.
2. Plus de 2 individus aient une réaction dangereuse.

A justifier la loi de probabilité utilisée.

Solution :

$$p = 0,001$$

$$q = 0,999$$

$$n = 2000$$

$$X \curvearrowright \mathcal{B}(2000 ; 0.001)$$

1. La probabilité pour que 3 individus aient une réaction dangereuse :

$$P(X = 3) = C_{2000}^3 p^3 q^{1997} = C_{2000}^3 (0.001)^3 (0.999)^{1997} = 0.18$$

On peut calculer la probabilité d'une autre méthode puisque les 3 conditions de la loi de probabilité présentent :

- a. (n) est très grand ($n \geq 30$) ;
- b. (p) est très faible ($p < 0,1$) ;
- c. $\lambda = np = 2 < 5$

On peut procéder par approximation à la loi de poisson et on pose :

$$P(X = x_i) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$P(X = 3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0,18$$

2. La probabilité pour que plus de 2 individus aient une réaction dangereuse :

$$\begin{aligned}P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) \\&= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \\&= 1 - \left[\frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 e^{-2}}{2!} \right] \\&= 1 - [0,135 + 0,27 + 0,27] = 0,325\end{aligned}$$